Über das Gleichgewicht an einer randbelasteten Schale

Günther, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 8, 1956, S.111-120

Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Über das Gleichgewicht an einer randbelasteten Schale

Von **Wilhelm Günther**, Braunschweig

Vorgelegt von Herrn **H. Schaefer**

Mit 2 Abbildungen

Summary: The general solution of the six equations of equilibrium in bending theory of shells contains six arbitrary functions. It is showed, that this functions form a set of two vectors, called the vectors of stress—functions. Neglecting the moments about normal direction of the shell, this two vectors depend of only four arbitrary functions. In membrane—theory, the resting one stress—function satisfies a differential—equation of 2th order, first established by Lagally [2].

Übersicht: Die allgemeine Lösung der sechs Gleichgewichtsbedingungen in der Biegetheorie der Schalen enthält sechs willkürliche Funktionen. Es wird gezeigt, daß diese zu zwei Vektoren zusammengefaßt werden können, den „Vektoren der Spannungsfunktionen". Für verschwindende Momente um die Schalennormale hängen diese Vektoren noch von vier willkürlichen Funktionen ab; in der Membrantheorie genügt die verbleibende eine Spannungsfunktion einer Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese Differentialgleichung wurde zuerst von *Lagally* [2] aufgestellt.

1. Flächentheoretische Hilfsmittel

An den Anfang unserer Überlegungen stellen wir eine kurze Übersicht über die in der Folge benötigten Begriffsbildungen und Formeln der Flächentheorie, wobei wir uns an die Darstellung bei *Lagally* [1] anschließen:

Über eine räumlich gekrümmte Fläche sei ein Netz orthogonaler Parameterkurven geworfen (Abb. 1); der zu einem Flächenpunkt P weisende Orts-

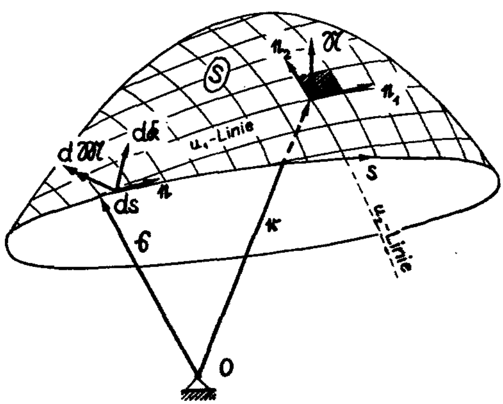

Abb. 1. Randbelastete Schalenmittelfläche mit Orthogonalnetz.

vektor $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\,(u_1, u_2)$ sei eine im betrachteten Flächenbereich eindeutige und genügend oft differenzierbare vektorielle Funktion der *Gauß*schen Parameter u_1 und u_2. Die in Richtung wachsender Parameterwerte zeigenden Tangenteneinheitsvektoren an die Parameterkurven seien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$; sind s_1 und s_2 die gleichsinnig mit u_1 und u_2 wachsenden Bogenlängen auf den Parameterkurven, so ist

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_1}, \qquad \mathfrak{e}_2 = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial s_2}. \tag{1}$$

Wir ergänzen $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ durch den Einheitsvektor $\mathfrak{N}$ der Flächennormalen zu einem rechtshändigen orthogonalen Dreibein, dem „begleitenden Dreibein“:

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 . \tag{2}$$

Die Bogendifferentiale ds_1 und ds_2 lassen sich durch die Parameterdifferentiale du_1 und du_2 ausdrücken:

$$ds_1 = \sqrt{a_{11}}\, du_1, \qquad ds_2 = \sqrt{a_{22}}\, du_2 ; \tag{3}$$

$a_{11} = a_{11}\,(u_1, u_2)$ und $a_{22} = a_{22}\,(u_1, u_2)$ sind die Koeffizienten der „1. Grundform“

$$ds^2 = a_{11}\, du_1^{\,2} + a_{22}\, du_2^{\,2} \tag{4}$$

der Fläche.

Überführt man das starre Dreibein der Einheitsvektoren längs einer der Parameterkurven in einem Nachbarpunkt so, daß es dort wieder begleitendes Dreibein wird, so ändert es seine räumliche Lage durch eine starre Drehung; die dabei entstehenden Änderungen der Einheitsvektoren sind ([1], Seite 90):

$$\begin{array}{rcccl}
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial s_1} = & * & G_1\, \mathfrak{e}_2 & - N_1\, \mathfrak{N} & , \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial s_1} = & - G_1\, \mathfrak{e}_1 & * & + T\, \mathfrak{N} & , \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_1} = & N_1\, \mathfrak{e}_1 & - T\, \mathfrak{e}_2 & * & ;
\end{array} \tag{5a}$$

$$\begin{array}{rcccl}
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial s_2} = & * & G_2\, \mathfrak{e}_1 & - N_2\, \mathfrak{N} & , \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial s_2} = & - G_2\, \mathfrak{e}_2 & * & + T\, \mathfrak{N} & , \\[2ex]
\dfrac{\partial \mathfrak{N}}{\partial s_2} = & N_2\, \mathfrak{e}_2 & - T\, \mathfrak{e}_1 & * & .
\end{array} \tag{5b}$$

Dabei sind G_1 und G_2 die geodätischen Krümmungen der Parameterkurven, also die Krümmungen der Projektionen dieser Kurven auf die Tangentialebene an die Fläche im Punkte P; diese Größen drücken sich durch die Koeffizienten der 1. Grundform wie folgt aus:

$$G_1 = -\frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}} \cdot \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial u_2},$$

$$G_2 = -\frac{1}{\sqrt{a_{11}\,a_{22}}} \cdot \frac{\partial \sqrt{a_{22}}}{\partial u_1}. \tag{6}$$

N_1 und N_2 sind die Normalkrümmungen der Parameterkurven, also die Krümmungen der Projektionen dieser Kurven auf die durch $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{N}$ gegebenen Ebenen.

$T_1 = +T$ und $T_2 = -T$ sind die geodätischen Torsionen der Parameterkurven, also die auf die Längeneinheit bezogenen Drehwinkel der Drehung des begleitenden Dreibeins um die jeweilige Kurventangente. Die *Gauß*sche Krümmung der Fläche im Punkte P ist

$$K = N_1 N_2 - T^2, \tag{7}$$

von der sich zeigen läßt, daß sie eine Biegungsinvariante ist. Die Krümmungsgrößen G_1, G_2, N_1, N_2 und T sind nicht unabhängig voneinander; zwischen ihnen bestehen die *Codazzi*schen Gleichungen

$$\frac{\partial N_2}{\partial s_1} + \frac{\partial T}{\partial s_2} + (N_1 - N_2)\,G_2 - 2\,T G_1 = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} + \frac{\partial N_1}{\partial s_2} + (N_2 - N_1)\,G_1 - 2\,T G_2 = 0, \tag{8}$$

und die *Gauß*sche Gleichung

$$\frac{\partial G_1}{\partial s_2} + \frac{\partial G_2}{\partial s_1} - (G_1{}^2 + G_2{}^2) = K\ ; \tag{9}$$

diese Beziehungen folgen aus der Eindeutigkeit der Bewegung des Dreibeins der Einheitsvektoren beim Umfahren eines infinitesimalen Flächenelementes. Für irgendeine über der Fläche definierte skalare oder vektorielle eindeutige Ortsfunktion läßt sich ebenfalls die Eindeutigkeitsbedingung aufstellen; sie lautet:

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial}{\partial s_1}\right) - \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial}{\partial s_2}\right) = G_1 \frac{\partial}{\partial s_1} - G_2 \frac{\partial}{\partial s_2}\ ; \tag{10}$$

die Reihenfolge zweier Differentationsprozesse ist also nicht vertauschbar.

2. Die Beanspruchungsgrößen der Schale und ihr Gleichgewicht

Eine biegesteife Schale denken wir uns durch ihre Mittelfläche repräsentiert, die wir im Hinblick auf das Gleichgewicht der an ihr angreifenden Kräfte und Momente als starr ansehen wollen. Ein Element dieser Fläche und die an

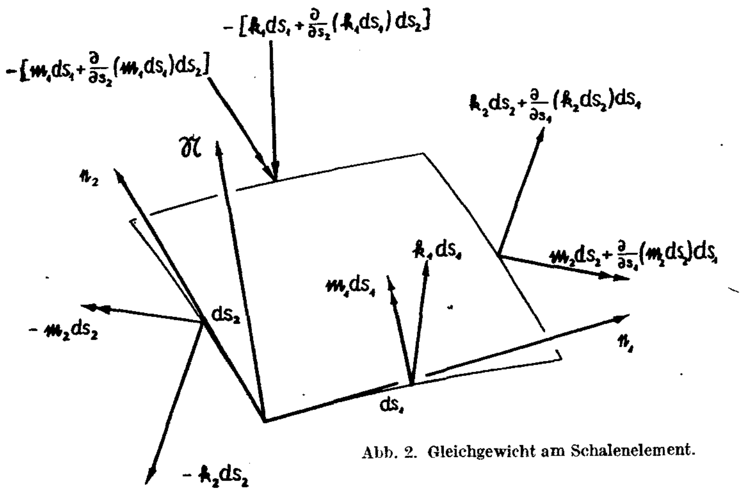

Abb. 2. Gleichgewicht am Schalenelement.

seinen Rändern angreifenden Kräfte und Momente sind in Abb. 2 dargestellt. $\mathfrak{k}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ sind die auf die Längeneinheit des jeweiligen Schnittes bezogenen Kräfte, $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{m}_2$ die ebenso bezogenen Momente.

Für das Kräftegleichgewicht am Schalenelement ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial s_1}(\mathfrak{k}_2\, ds_2)\, ds_1 - \frac{\partial}{\partial s_2}(\mathfrak{k}_1\, ds_1)\, ds_2 = 0\,. \tag{11}$$

Formt man dies mit Hilfe von (3) und (6) um, so erhält man:

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{k}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathfrak{k}_1}{\partial s_2} + G_1\, \mathfrak{k}_1 - G_2\, \mathfrak{k}_2 = 0\,.} \tag{12}$$

Ebenso formulieren wir die Bedingungen des Momentengleichgewichtes und erhalten:

$$\boxed{\frac{\partial \mathfrak{m}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathfrak{m}_1}{\partial s_2} + G_1\, \mathfrak{m}_1 - G_2\, \mathfrak{m}_2 + \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{k}_2 - \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{k}_1 = 0\,.} \tag{13}$$

Setzen wir für die Beanspruchungsgrößen die Zerlegungen

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_1 &= k_{11}\, \mathfrak{e}_1 + k_{12}\, \mathfrak{e}_2 + k_1\, \mathfrak{N}\,, \\
\mathfrak{k}_2 &= k_{21}\, \mathfrak{e}_1 + k_{22}\, \mathfrak{e}_2 + k_2\, \mathfrak{N}\,; \\
\mathfrak{m}_1 &= m_{11}\, \mathfrak{e}_1 + m_{12}\, \mathfrak{e}_2 + m_1\, \mathfrak{N}\,, \\
\mathfrak{m}_2 &= m_{21}\, \mathfrak{e}_1 + m_{22}\, \mathfrak{e}_2 + m_2\, \mathfrak{N}
\end{aligned}$$

an, so schreiben sich die Gleichgewichtsbedingungen (12) und (13) unter Beachtung von (5a) und (5b):

Kräftegleichgewicht:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial s_2}+G_1\right)k_{11} - G_2\,k_{12} + T\,k_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s_1}-G_2\right)k_{21} - G_1\,k_{22} + N_1\,k_2 = 0,$$

$$G_2\,k_{11} + \left(-\frac{\partial}{\partial s_2}+G_1\right)k_{12} - N_2\,k_1 + G_1\,k_{21} + \left(\frac{\partial}{\partial s_1}-G_2\right)k_{22} - T\,k_2 = 0,$$

$$-T\,k_{11} + N_2\,k_{12} + \left(-\frac{\partial}{\partial s_2}+G_1\right)k_1 - N_1\,k_{21} + T\,k_{22} + \left(\frac{\partial}{\partial s_1}-G_2\right)k_2 = 0; \tag{15}$$

Momentgleichgewicht:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial s_2}+G_1\right)m_{11} - G_2\,m_{11} + T\,m_1 + \left(\frac{\partial}{\partial s_1}-G_2\right)m_{21} - G_1\,m_{22} + N_1\,m_2 = k_1,$$

$$G_2\,m_{11} + \left(-\frac{\partial}{\partial s_2}+G_1\right)m_{11} - N_2\,m_1 + G_1\,m_{21} + \left(\frac{\partial}{\partial s_1}-G_2\right)m_{22} - T\,m_2 = k_2,$$

$$-T\,m_{11} + N_2\,m_{12} + \left(-\frac{\partial}{\partial s_2}+G_1\right)m_1 - N_1\,m_{21} + T\,m_{22} + \left(\frac{\partial}{\partial s_1}-G_2\right)m_2 = \tag{16}$$

$$= -\,(k_{11} + k_{22})$$

Dies sind 6 Differentialgleichungen 1. Ordnung für die 12 Beanspruchungsgrößen

$k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}$, die „Längskräfte",
k_1, k_2, die „Querkräfte",
m_{11}, m_{22}, die „Biegemomente",
m_{12}, m_{21}, die „Drillmomente",
m_1, m_2, die „Quermomente".

Das Gleichgewichtsproblem der Schale ist also 6fach funktional unbestimmt. Schließt man nun den Fall aus, daß in die Schale Einzelmomente um die Schalennormale eingeleitet werden, so sind die (aus einer stetigen Längsspannungsverteilung entstehenden) Quermomente m_1 und m_2 am Schalenelement von der Größenordnung ds_1 und ds_2, können also gegenüber den anderen, endlich bleibenden Momentengrößen vernachlässigt werden. Dann ist das Gleichgewichtsproblem noch 4fach funktional unbestimmt.

3. Allgemeine Lösung der Gleichgewichtsbedingungen

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, mit Hilfe von 6 bzw. 4 willkürlichen Funktionen Beanspruchungsgrößen zu konstruieren, die automatisch den Gleichgewichtsbedingungen (15) und (16) genügen.

Dazu betrachten einen endlichen, einfach zusammenhängenden Teil S der Schalenfläche, dessen orientierter Rand durch Kräfte und Momente so belastet ist (Abb. 1), daß S im Gleichgewicht ist.

Ist $d\mathfrak{K} = \mathfrak{k}\,ds$ die am Bogenelement ds angreifende Kraft,

$d\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\,ds$ das am Bogenelement ds angreifende Moment,

so muß die Dyname des aus der Gesamtheit der $d\mathfrak{K}$ und $d\mathfrak{M}$ gebildeten Systems in jedem Punkte des Raumes verschwinden.

Mit 0 als Reduktionspunkt und $\mathfrak{s}$ als Ortsvektor zu den Randpunkten von S ergibt das:

$$\text{a)}\ \oint \mathfrak{k}\,ds = 0\,, \qquad \text{b)}\ \oint [\mathfrak{m} + \mathfrak{s} \times \mathfrak{k}]\,ds = 0\,. \tag{17}$$

Dafür, daß (17a) erfüllt ist, ist hinreichend und notwendig, daß $\mathfrak{k}$ der Gradient einer vektoriellen Ortsfunktion $\mathfrak{U}$ ist:

$$\boxed{\mathfrak{k} = \frac{d\,\mathfrak{U}}{ds}}\,; \tag{18}$$

dafür, daß (17b) erfüllt ist, ist hinreichend und notwendig, daß $[\mathfrak{m} + \mathfrak{s} \times \mathfrak{k}]$ der Gradient einer vektoriellen Ortsfunktion $\mathfrak{V}^*$ ist:

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{s} \times \mathfrak{k} = \frac{d\,\mathfrak{V}^*}{ds}\,, \tag{19}$$

oder, mit (18):

$$\mathfrak{m} + \mathfrak{s} \times \frac{d\,\mathfrak{U}}{ds} = \frac{d\,\mathfrak{V}^*}{ds}. \tag{20}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{V}^* - \mathfrak{s} \times \mathfrak{U} = \mathfrak{V}$$

und beachten, daß

$$\frac{d\mathfrak{s}}{ds} = \mathfrak{e}$$

der Tangenteneinheitsvektor an die Randkurve ist, so läßt sich (20) umformen in

$$\boxed{\mathfrak{m} = \mathfrak{e} \times \mathfrak{U} + \frac{d\,\mathfrak{V}}{ds}}\,. \tag{21}$$

Unter dem Einfluß der Randbelastungen $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{m}$, die gemäß (18) und (21) aus zwei beliebigen eindeutigen vektoriellen Ortsfunktionen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ entspringen, befindet sich die Schale im Gleichgewicht. $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ sind die „vektoriellen Spannungsfunktionen" für das Gleichgewichtsproblem der Schale; es stehen uns also 6 willkürliche Funktionen zur Verfügung. Für die im 2. Abschnitt eingeführten Beanspruchungsgrößen $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ergeben sich die Darstellungen

$$\boxed{\begin{aligned} &\mathfrak{k}_1 = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1}, \qquad \mathfrak{k}_2 = \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2}, \\ &\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{U} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{d\, s_1}, \\ &\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{U} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial\, s_2}. \end{aligned}} \tag{22}$$

Es ist leicht explizit zu zeigen, daß diese Beanspruchungsgrößen den Gleichgewichtsbedingungen (12) und (13) genügen:

Einsetzen in die linke Seite von (12) liefert:

$$\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2}\right) - \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1}\right) + G_1 \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1} - G_2 \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2} = 0\,,$$

und das ist gerade die Eindeutigkeitsbedingung (10) für die Spannungsfunktion $\mathfrak{U}$.

Ebenso behandeln wir die Momentengleichgewichtsbedingung (13):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial s_1}\left[\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{U} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_2}\right] - \frac{\partial}{\partial s_2}\left[\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{U} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1}\right] + \\ &+ G_1\left[\mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{U} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1}\right] - G_2\left[\mathfrak{e}_2 \times \mathfrak{U} + \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_2}\right] + \\ &\qquad + \mathfrak{e}_1 \times \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2} - \mathfrak{e}_2 \times \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1} = \\ &= \left[\frac{\partial \mathfrak{e}_2}{\partial s_1} - \frac{\partial \mathfrak{e}_1}{\partial s_2} + G_1 \mathfrak{e}_1 - G_2 \mathfrak{e}_2\right] \times \mathfrak{U} + \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_2}\right) - \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1}\right) + G_1 \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1} - G_2 \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_2}\right]; \end{aligned}$$

die erste Klammer verschwindet nach (5a, b), die zweite auf Grund der Eindeutigkeit der Ortsfunktion $\mathfrak{V}$ nach (10).

Führen wir jetzt die Zerlegungen

$$\mathfrak{U} = U_1\,\mathfrak{e}_1 + U_2\,\mathfrak{e}_2 + U\,\mathfrak{N}\,,$$
$$\mathfrak{V} = V_1\,\mathfrak{e}_1 + V_2\,\mathfrak{e}_2 + V\,\mathfrak{N}$$

ein, so können wir die Darstellungen (22) der Beanspruchungsgrößen durch 6 willkürliche Spannungsfunktionen explizit hinschreiben:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= \quad * \quad - \boldsymbol{G}_1 U_2 + \boldsymbol{N}_1 U + \frac{\partial U_1}{\partial s_1}\,,\\
k_{12} &= \boldsymbol{G}_1 U_1 \quad * \quad - \boldsymbol{T} U + \frac{\partial U_2}{\partial s_1}\,,\\
k_1 &= -\boldsymbol{N}_1 U_1 + \boldsymbol{T} U_2 \quad * \quad + \frac{\partial U}{\partial s_1}\,,\\
k_{21} &= \quad * \quad \boldsymbol{G}_2 U_2 - \boldsymbol{T} U + \frac{\partial U_1}{\partial s_2}\,,\\
k_{22} &= -\boldsymbol{G}_2 U_1 \quad * \quad + \boldsymbol{N}_2 U + \frac{\partial U_2}{\partial s_2}\,,\\
k_2 &= \boldsymbol{T} U_1 - \boldsymbol{N}_2 U_2 \quad * \quad + \frac{\partial U}{\partial s_2}\,;
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}
m_{11} &= \quad * \quad - \boldsymbol{G}_1 V_2 + \boldsymbol{N}_1 V + \frac{\partial V_1}{\partial s_1}\,,\\
m_{12} &= \boldsymbol{G}_1 V_1 \quad * \quad - \boldsymbol{T} V + \frac{\partial V_2}{\partial s_1} - U\,,\\
m_1 &= -\boldsymbol{N}_1 V_1 + \boldsymbol{T} V_2 \quad * \quad + \frac{\partial V}{\partial s_1} + U_2\,,\\
m_{21} &= \quad * \quad \boldsymbol{G}_2 V_2 - \boldsymbol{T} V + \frac{\partial V_1}{\partial s_2} + U\,,\\
m_{22} &= -\boldsymbol{G}_2 V_1 \quad * \quad + \boldsymbol{N}_2 V + \frac{\partial V_2}{\partial s_2}\,,\\
m_2 &= \boldsymbol{T} V_1 - \boldsymbol{N}_2 V_2 \quad * \quad + \frac{\partial V}{\partial s_2} - U_1\,.
\end{aligned} \tag{25}$$

Der — zwar nicht notwendige, aber zur Kontrolle wünschenswerte — Nachweis, daß die Beanspruchungsgrößen (24), (25) den Gleichgewichtsbedingungen (15) und (16) genügen, soll hier nicht durchgerechnet werden; er stützt sich vor allem auf die Eindeutigkeitsbedingung (10), auf die *Codazzi*schen Gleichungen (8) und die *Gauß*sche Gleichung (9).

Wie schon erwähnt, kann man im allgemeinen annehmen, daß Momente m_1 und m_2 um die Schalennormale nicht vorhanden sind; man übersieht sofort, daß sich dann (wie es sein muß) die Zahl der voneinander unabhängigen Spannungsfunktionen auf vier reduziert; aus $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ folgt nämlich:

$$U_1 = \quad \frac{\partial V}{\partial s_2} - N_2 V_2 + T V_1 ,$$

$$U_2 = - \frac{\partial V}{\partial s_1} + N_1 V_1 - T V_2 , \tag{26}$$

so daß mit $\mathfrak{V}$ auch die in der Tangentialebene liegenden Komponenten von $\mathfrak{U}$ gegeben sind.

4. Membranspannungszustand

An einer dünnen Schale kann im Inneren eines Bereiches S Gleichgewicht stets durch Längskräfte allein hergestellt werden, vorausgesetzt, daß im Inneren von S keine Einzelkräfte oder -momente angreifen. Für diesen „Membranspannungszustand" sind also alle Momente und die Querkräfte Null. Der Membranspannungszustand ist „innerlich statisch bestimmt", d. h. die Längskräfte können nach Vorgabe ihres Randverlaufes eindeutig mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (15) und (16), in denen die Momente und Querkräfte zu streichen sind, berechnet werden. Infolgedessen gibt es keine eigentliche Spannungsfunktion mehr. Das Problem ist von *Lagally* [2] mit Hilfe einer differentialgeometrischen Analogie untersucht worden; wir wollen seine Ergebnisse durch Spezialisierung aus unseren allgemeinen Ansätzen wiedergewinnen.

Für den Membranspannungszustand gilt wegen seiner Momentenfreiheit nach (22):

$$\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_1} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{e}_1 , \qquad \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial s_2} = \mathfrak{U} \times \mathfrak{e}_2 . \tag{27}$$

Daraus folgt nach (1):

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 + \int_{P_0}^{P} \mathfrak{U} \times d\mathfrak{s} . \tag{28}$$

In (28) kann $\mathfrak{U}$ nicht willkürlich sein, da doch $\mathfrak{V}$ eine eindeutige Ortsfunktion werden soll. Die Eindeutigkeitsbedingung gewinnen wir aus den Gleichungen (27) durch Differentiation unter Berücksichtigung von (10):

$$\frac{\partial}{\partial s_2}(\mathfrak{U} \times \mathfrak{e}_1) - \frac{\partial}{\partial s_1}(\mathfrak{U} \times \mathfrak{e}_2) = G_1 (\mathfrak{U} \times \mathfrak{e}_1) - G_2 (\mathfrak{U} \times \mathfrak{e}_2) . \tag{29}$$

Differenzieren wir die Produkte aus und beachten die Gleichungen (5) für die Änderungen der Einheitsvektoren, so bekommen wir

$$\mathfrak{e}_2 \times \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1} - \mathfrak{e}_1 \times \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2} = 0 \tag{30}$$

als die gesuchte Eindeutigkeitsbedingung.

Wir multiplizieren sie skalar der Reihe nach mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{N}$; das führt zu den Gleichungen

$$\mathfrak{N} \circ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1} = 0 , \qquad \mathfrak{N} \circ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2} = 0 ; \tag{31}$$

$$\mathfrak{e}_1 \circ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_1} + \mathfrak{e}_2 \circ \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s_2} = 0 . \tag{32}$$

Wir behandeln zunächst die Gleichungen (31), die natürlich nichts anderes als das Verschwinden der Querkräfte beschreiben: $k_1 = 0$, $k_2 = 0$.

Aus (24) entnehmen wir:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{N}_1 U_1 - \boldsymbol{T} U_2 &= \frac{\partial U}{\partial s_1} , \\ - \boldsymbol{T} U_1 + \boldsymbol{N}_2 U_2 &= \frac{\partial U}{\partial s_2} ; \end{aligned} \tag{33}$$

unter der Voraussetzung, daß die *Gauß*sche Krümmung $\mathbf{K}$ (7) nicht verschwindet, können wir somit U_1 und U_2 durch die Ableitungen der Normalkomponente U von $\mathfrak{U}$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\boldsymbol{N}_2}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_1} + \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_2} , \\ U_2 &= \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_1} + \frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_2} . \end{aligned} \tag{34}$$

Die dritte Eindeutigkeitsbedingung (32) geht mit (34) über in die Differentialgleichung der „Spannungsfunktion" des Membranspannungszustandes:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial s_1} - \boldsymbol{G}_2\right) \left[\frac{\boldsymbol{N}_2}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_1} + \frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_2}\right] + \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial s_2} - \boldsymbol{G}_1\right) \left[\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_1} + \frac{\boldsymbol{N}_1}{\boldsymbol{K}} \cdot \frac{\partial U}{\partial s_2}\right] + 2 \boldsymbol{H} U = 0 \end{aligned} \tag{35}$$

wobei

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2)$$

die „mittlere Krümmung" der Schalenmittelfläche ist. Gleichung (35) findet sich bei *Lagally* [2]. Dort wird sie als die „charakteristische Gleichung" des Problems bezeichnet.

Literatur

[1] *Lagally, M.*, Vorlesungen über Vektorrechnung, Leipzig 1934.

[2] *Lagally, M.*, Über Spannung und elastische Deformation von unebenen Membranen, ZAMM 4 (1924), 5, Seite 377—383.